SPEZIALKLASSEN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE KARL-MARX-STADT

Schriftliche Reifeprüfung 1973

F a c h   M a t h e m a t i k

Abituraufgaben 1973

1. Man suche einen Ausdruck für die Berechnung der Summe

$$s_n = \frac{1}{a+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a+i)(a+i+1)}$$

indem man eine Vermutung aufstellt und sie durch vollständige Induktion beweist.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem schneide die Gerade $g_1 : y = -x + c$ $(c > 0)$ die Koordinatenachse in den Punkten B und A. Von B (0; c) wird parallel zur x-Achse die Strecke a angetragen. Der Endpunkt sie C. Eine Gerade g_2 gehe durch C und den Ursprung des Koordinatensystems. Sie schneide g_1 in Q. Durch A lege man eine Parallele zur y-Achse, die g_2 in P schneidet.
   Man bestimme die geometrischen Örter von P und Q, wenn g_1 parallel zu sich selbst verschoben wird.

3. Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \begin{cases} -x + x\ln(-x) & \text{für } -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \\ f_2(x) = a x^2 + bx + c & \text{für } 0 \leqq x \leqq 2 \\ f_3(x) = kx + h & \text{für } 2 \leqq x < \infty \end{cases}$$

   Man bestimme a, b, c, k, h und n, so daß die Gerade $y = \frac{1}{2}x + n$ / $f_1(x)$ und $f_2(x)$ berührt ($f_2(x)$ an der Stelle $x_1 = 1$), $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und an der Stelle $x_2 = \overset{2}{3}$ differenzierbar ist.
   Man skizziere das Funktionsbild und gebe in einer Tabelle an: Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte.

4. Die Brennpunkte F_i einer Ellipse seien Mittelpunkte je einer Kugel mit den Radien k_1 und k_2. Die Kreise um F_i mit $r_i = k_i$ liegen vollständig im Inneren der Ellipse. Man bestimme die Punkte P auf der Ellipse, von denen aus die Summe der beiden überblickbaren Kugelkappen am größten wird.
Anleitung: Man nehme die Länge eines Brennstrahls als unabhängige Variable und gebe die Punkte durch ihre zugehörigen Brennstrahlen an.

5. Gegeben ist die Kurvengleichung

$$r = \cos\varphi(3 - \tan^2\varphi).$$

Man zeichne das Kurvenbild und gehe über zur Darstellung in kartesischen Koordinaten. Die von der Kurve vollständig umschlossene Fläche rotiere um die x-Achse. Man bestimme den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers und seinen größten Durchmesser.

6. Ein Dreieck ist gegeben durch die Punkte
A (1; 1; 0), B (-1; 3; 2), C (-2; -1; z_0) in einem kartesischen Koordinatensystem. Man bestimme z_0, so daß der Flächeninhalt des Dreiecks $A = \frac{5}{2}\sqrt{6}\ E^2$ beträgt.
Durch den Punkt C gehe eine Gerade g_1, die senkrecht auf der Ebene des Dreiecks steht. Auf g_1 bestimme man Punkte S_i, so daß über dem Dreieck errichtete Pyramiden mit S_i als Spitze je einen Rauminhalt $V = 20\ E^2$ haben.

Welche Höhe hat eine solche Pyramide?

7. Gegeben ist ein Vektorsystem $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ mit

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2p\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix}3\\p\\p+3\end{pmatrix}$$

Man untersuche die lineare Abhängigkeit des Systems für alle reellen p. Für welches p sind die Vektoren paarweise orthogonal? Gegeben ist noch

$$\mathfrak{a}_4 = \begin{pmatrix}1\\ \frac{p}{3}\\ p\end{pmatrix}$$

Man untersuche, ob es dann ein p gibt, für das die 3 Vektoren $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ parallel sind.

Von den folgenden Aufgaben ist eine zu lösen.

1. Wahlaufgabe

Eine Höhenrakete erreicht in 230 km Höhe ihre Brennschlugeschwindigkeit. Ihre Flugrichtung (Tangente an Bahnkurve) bildet dort mit der Richtung zum Erdmittelpunkt einen Winkel von 135°. Der höchste Punkt der Flugbahn liegt 8630 km über der Erdoberfläche.

Wie lautet die Gleichung der elliptischen Flugbahn in Polarkoordinaten, wenn die Erde als Kugel und ihre Masse als im Mittelpunkt konzentriert angesehen wird?

In welcher Entfernung vom Ort unter dem Brennschlußpunkt (Kreisbogen) erreicht die Rakete die Erdoberfläche, wenn man die Wirkung der Atmosphäre vernachlässigt?

Es genügt Rechenschiebergenauigkeit

Erdradius R = 6370 km.

2. Wahlaufgabe

Eine Parameterdarstellung einer Kurve lautet:

$x = t^2 - t + 1$

$y = t^2 + t + 1$

Man skizziere das Kurvenbild, gebe die Gleichung der Kurve in parameterfreier Form an und lege die Kurve so in das Koordinatensystem, daß ihre Gleichung möglichst einfach wird.

Wie lautet sie dann? Geben Sie charakteristische Größen der Kurve an!

Man bestimme die Stellen t, von denen aus die Tangenten an die Kurve in der ursprünglichen Lage durch den Nullpunkt gehen.

3. Wahlaufgabe

Die Kurve einer Eisenbahnstrecke hat die Form des rechten Astes einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ihre Halbachsen a und b sind dadurch bestimmt, daß zwei geradlinige Wege die Strecke tangieren. Die Wege können im gleichen Koordinatensystem durch die Gleichung $x - y - 2 = 0$ und $3x + \sqrt{2}y - 8 = 0$ dargestellt werden. An einer geradlinigen Straße, dargestellt durch die Gleichung $\sqrt{6}x - 3y + 3 = 0$, soll an der Stelle des kürzesten Abstands zur Strecke ein Wartehäuschen gebaut werden.

Welcher Punkt der Hyperbel liegt der Straße am nächsten? Wie groß ist der Abstand, wenn eine Einheit einer Länge von 200 m entspricht? In welchen Punkten berühren die gradlinigen Wege die Strecke?